Séquence 5 : Dénombrement et combinatoire

1 Ensembles finis

Définition. • *Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.*

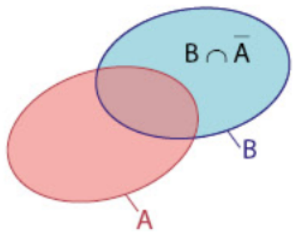
- *On appelle **cardinal** d'un ensemble fini A, et on note $card(A)$ le nombre d'éléments de cet ensemble fini.*

1.1 Principe additif

Pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E, on a

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont deux parties **disjointes**,
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.



1.2 Principe multiplicatif

Définition. *Le **produit cartésien** de deux ensembles finis E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.*

Exemple. *Soient $E = \{a\,;\,b\}$ et $F = \{0\,;\,1\,;\,2\}$.*
Alors $E \times F = \{(a\,;\,0)\ ;\ (a\,;\,1)\ ;\ (a\,;\,2)\ ;\ (b\,;\,0)\ ;\ (b\,;\,1)\ ;\ (b\,;\,2)\}$.
On peut lister les éléments d'un produit cartésien de deux ensembles à l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre.

E \ F	1	2	3
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	$(a\,;3)$
b	$(b\,;1)$	$(b\,;2)$	$(b\,;3)$

Proposition. *Si E et F sont deux ensembles finis, alors :*

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

En effet, le nombre de cases du tableau croisé est le produit du nombre de colonnes par le nombre de lignes.

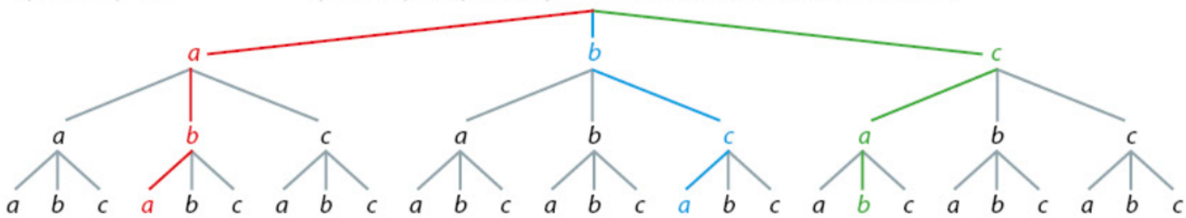
1.3 Ensemble des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Définition. *Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel non nul.*
*Un **k-uplet** d'éléments de E est une **liste ordonnée** de k éléments de E, distincts ou confondus.*
L'ensemble de tous les k-uplets de E est l'ensemble $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k\ fois}$; on le note E^k.

Exemple

$E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$. Cet arbre permet de lister les triplets de E^3.

- $(a\,;\,b\,;\,a) \in E^3$
- $(b\,;\,c\,;\,a)$ et $(c\,;\,a\,;\,b)$ sont des triplets différents de E^3.



Proposition. *Soit k un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 et E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).*
Le nombre de k-uplets de E est n^k, c'est-à-dire que :

$$Card(E^k) = n^k$$

Démonstration. □

2 Arrangements et permutations d'un ensemble fini

2.1 Arrangements d'un ensemble

Définition. *Soit n un entier naturel non nul. On appelle* ***factorielle*** *de n le nombre : $n! = n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1$. Par convention, $0! = 1$.*

Définition. *Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.*
Un ***arrangement*** *de k éléments de E (ou k-arrangement) est un k-uplet d'éléments distincts de A.*

Exemple. *Si $E = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$, alors $(1\,;\,3\,;\,4)$ et $(1\,;\,4\,;\,3)$ sont deux 3-arrangements de E.*

Proposition. *Soient E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.*
Le nombre de k-arrangements de E est égal à :

$$\mathcal{A}_n^k = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration. □

2.2 Permutations d'un ensemble

Définition. *Soit E un ensemble non vide à n éléments.*
Une ***permutation*** *de E est un n-uplet d'éléments distincts de A.*
C'est en fait un n-arrangement.

Exemple. *Soit $E = \{1\,;\,2\,;\,3\}$.*
Les permutations de E sont :

Proposition. *Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.*

3 Nombre de parties d'un ensemble - combinaisons

3.1 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition.

- *Si E et A sont deux ensembles, la notation $A \subset E$ signifie que tout élément de A appartient à E.*
  Autrement dit, A est une ***partie*** *(ou sous-ensemble) de E.*
- *On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.*
  L'ensemble vide*, noté $\emptyset$, est une partie de tout ensemble.*

Exemple. • *L'ensemble $E = \{a\,;\,b\}$ est constitué de parties :*

⋆ *à 0 éléments : $\emptyset$* ⋆ *à 1 élément : $\{a\}$, $\{b\}$* ⋆ *à 2 éléments : $\{a\,;\,b\}$*

Donc E a 4 parties et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\,;\{a\}\,;\{b\}\,;\,\{a\,;\,b\}\,\}$.

- *L'ensemble vide $E = \emptyset$ admet une partie à 0 élément ; $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$*

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Un ensemble fini E à n éléments possède 2^n parties, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Démonstration. □

Liens entre parties d'un ensemble à *n* éléments, *n*-uplets de $\{0\,;1\}$, ...

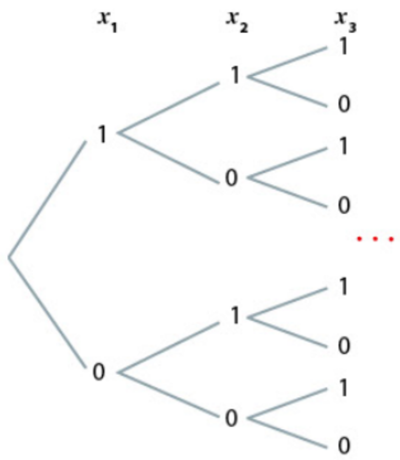
$\mathrm{E} = \{x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n\}$ est un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$.

À chaque partie de E correspond un unique n-uplet de $\{0\,;1\}$, et inversement. En effet :

- si x_1 appartient à la partie, on affecte 1 en 1$^{\text{re}}$ position du n-uplet et 0 sinon ;
- si x_2 appartient à la partie, on affecte 1 en 2$^{\text{e}}$ position du n-uplet et 0 sinon ;
- et ainsi de suite jusqu'à x_n et la n-ième position.

Par exemple, le n-uplet $(1\,;0\,;1\,;0\,;\ldots;0)$ correspond à la partie $\{x_1\,;x_3\}$; le n-uplet $(0\,;0\,;0\,;\ldots;0)$ correspond à $\varnothing$, ...

Ainsi, il y a autant de parties de l'ensemble E que de n-uplets de l'ensemble $\{0\,;1\}$, c'est-à-dire 2^n.



3.2 Nombre de combinaisons

Définition. *Soit E un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$) et k un nombre entier naturel avec $0 \leqslant k \leqslant n$.*
*Une **combinaison** de k éléments de l'ensemble E est une partie de k éléments de E.*
Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (on dit "k parmi n").

Remarque. • *l'odre n'intervient pas dans le choix des parties : $\{a\,;\,b\} = \{b\,;\,a\}$.*

- *il n'y a pas de répétitions : $\{a\,;\,a\} = \{a\}$.*

Exemple. *Cas particuliers :*

- $\binom{n}{n} = 1$ *car la seule partie de E à n éléments est E lui-même*
- $\binom{n}{0} = 1$ *car l'ensemble vide est la seule partie de E qui n'a pas d'éléments*
- $\binom{n}{1} = n$ *car il y a n parties de E à un seul élément*
- $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Proposition. *Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. Alors :*

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

- ***- Relation de Pascal -***
  si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *alors* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Démonstration. □